المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف العاشر - كتاب التمارين

الفصل الدراسي الثاني

10

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

يوسف سليمان جرادات نور محمد حسان إبراهيم عقله القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطوير المناهج في جلسـته رقـم (2020/7)، تاريخ 2020/12/1 م، وقـرار مجلس التربية والتعليـم رقم (2020/176)، تاريـخ 2020/12/17 م، بـدءًا من العام الـدراسي 2020 / 2021 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2020.
- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 383 - 8

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية:
(2022/4/2080)

375.001
الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج
الرياضيـات: الصـف العاشـر: كتـاب التماريـن (الفصـل الدراسـي الثانـي)/ المركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج.–ط2؛
مزيـدة ومنقحـة.– عمّـان: المركـز، 2022
(56) ص.
ر.إ.: 2022/4/2080
الواصفات: تطوير المناهج/ / المقررات الدراسية/ / مستويات التعليم/ / المناهج/
يتحمَّل المُؤلِّف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنَّفه، ولا يُعبِّر هذا المُصنَّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise , without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Lecensing Agency Ltd, Barnard›s Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.
British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1441 هـ / 2020 م
أعيدت طباعته 2021 م – 2023 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب تمارين متنوعة أعدت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي استكمال للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلمونها في كل درس، وتنمي مهارتكم الحسابية.

قد يختار المعلم/ المعلمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم البقية لتحلوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

تساعدكم الصفحات التي عنوانها (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ مما يعزز قدرتكم على متابعة التعلم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

يوجد فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة إجابته، وإذا لم يتسع هذا الفراغ لخطوات الحل جميعها فيمكنكم استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلمًا ممتعًا وميسّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 5 الاقتراناتُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ 6

الدرسُ 1 اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ 18

الدرسُ 2 قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتِ النسبيةِ 19

الدرسُ 3 تركيبُ الاقتراناتِ 20

الدرسُ 4 الاقترانُ العكسيُّ 21

الدرسُ 5 المتتالياتُ 22

الوحدةُ 6 المشتقاتُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ 23

الدرسُ 1 تقديرُ ميلِ المنحنى 27

الدرسُ 2 الاشتقاقُ 28

الدرسُ 3 القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى 29

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 7 المتجهاتُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ 30

الدرسُ 1 المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ 32

الدرسُ 2 جمعُ المتجهاتِ وطرحُها 33

الدرسُ 3 الضربُ القياسيُّ 35

الوحدةُ 8 الإحصاءُ والاحتمالاتُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ 36

الدرسُ 1 أشكالُ الانتشارِ 47

الدرسُ 2 المنحنى التكراريُّ التراكميُّ 48

الدرسُ 3 مقاييسُ التشتُّتِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ 49

الدرسُ 4 احتمالاتُ الحوادثِ المتنافيةِ..... 50

الدرسُ 5 احتمالاتُ الحوادثِ المستقلةِ والحوادثِ غيرِ المستقلةِ 51

أوراقُ مربعاتٍ 52

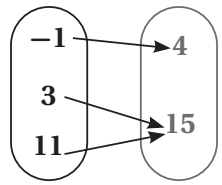
الوحدةُ 5: الاقتراناتُ

أختبِرُ مَعلوماتي بحلِّ التدريباتِ أوّلًا، وفي حالِ عَدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المُعطى.

• تعرّفُ العَلاقةِ، وتحديدُ ما إذا كانَتِ اقترانًا أمْ لا (الدرسُ 1)

أُحَدِّدُ مجالَ كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي وَمَداها، ثمَّ أُحَدِّدُ ما إذا كانتْ تمثِّلُ اقترانًا أمْ لا:

1



2

x	5	2	−7	2	5
y	4	8	9	12	14

3 $\{(-2, 5), (0, 2), (4, 5), (5, 6)\}$

4 $\{(6, 5), (4, 3), (6, 4), (5, 8)\}$

5 $\{(13, 5), (-4, 12), (6, 0), (13, 10)\}$

6 $\{(9.2, 7), (9.4, 11), (9.5, 9.5), (9.8, 8)\}$

7

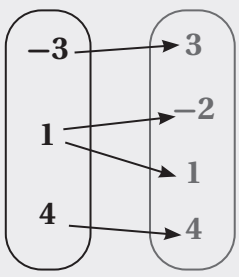
x	−3	−1	0	1	2
y	3	−4	5	−2	3

8

x	5	2	3	6	8
y	4	4	4	4	4

مثالٌ: أُحَدِّدُ مجالَ كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي وَمَداها، ثمَّ أُحَدِّدُ ما إذا كانتْ تمثِّلُ اقترانًا أمْ لا:

a)



المجالُ: $\{-3, 1, 4\}$ **المَدى:** $\{3, -2, 1, 4\}$

أُلاحِظُ ارتباطَ العنصرِ 1 في المجالِ بالعنصرينِ 2− وَ 1 في المَدى.

إذنْ، لا تمثِّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

b)

x	5	3	2	0	-4	-6
y	1	3	1	3	-2	2

المجالُ: $\{5, 3, 2, 0, -4, -6\}$ **المَدى**: $\{1, 3, -2, 2\}$

أُلاحِظُ ارتباطَ كلِّ عنصُرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ في المَدى. إذنْ، تمثِّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

c) {(0, 1), (2, 4), (3, 7), (5, 4)}

المجالُ: $\{0, 2, 3, 5\}$ **المَدى**: $\{1, 4, 7\}$

أُلاحِظُ ارتباطَ كلِّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ في المَدى. إذنْ، تمثِّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

d) {(−4, 2), (6, −1), (0, 0), (−4, 0)}

المجالُ: $\{-4, 6, 0\}$ **المَدى**: $\{2, -1, 0\}$

أُلاحِظُ ارتباطَ العنصرِ -4 في المجالِ بالعنصرينِ 2 وَ 0 في المَدى. إذنْ، لا تمثِّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

• إيجادُ صورةِ عددٍ في الاقترانِ (الدرسُ 1)

إذا كانَ $f(x) = 3x - 2$، وَ $g(x) = x^2 - 2x - 3$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

9 $g(0)$ 10 $f(2)$ 11 $f(-3)$ 12 $g(-4)$

مثالٌ: إذا كانَ $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$، فأَجِدُ $g(-2)$

قاعدةُ الاقترانِ $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$

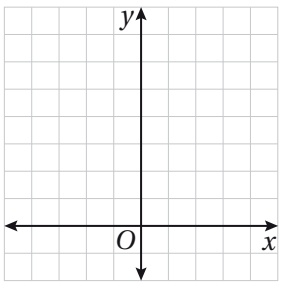
بتعويضِ $x = -2$ $g(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 4$

بالتبسيطِ $= 8 - 10 + 4 = 2$

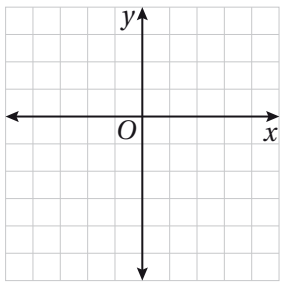
• تمثيلُ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا (الدرسُ 1)

أَجِدُ معادلةَ محورِ التَّماثُلِ، وإحداثِيَّيِ الرأسِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى وَمَجالَ وَمَدى كلٍّ مِنَ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ الآتيةِ، ثمَّ أمثّلُهُ بيانِيًّا:

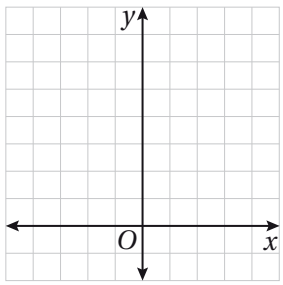
13 $f(x) = x^2 + 3$



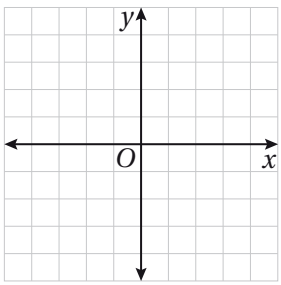
14 $f(x) = -x^2 - 4x - 4$



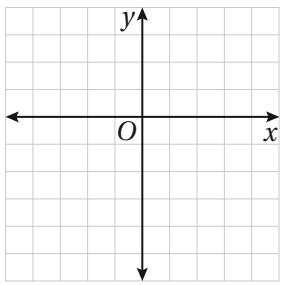
15 $f(x) = x^2 + 2x + 3$



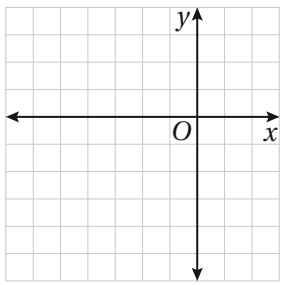
16 $f(x) = x^2 - 4$



17 $f(x) = -x^2 + 3$



18 $f(x) = -2x^2 - 8x - 5$



مثالٌ: أمثّلُ الاقترانَ: $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$ بيانيًّا.

الخُطْوَةُ 1 أحدّدُ اتِّجاهَ فتحةِ القطعِ المُكافِئِ، وَأَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ وإحداثِيَّيِ الرأسِ، وأحدّدُ إذا كانَ يمثّلُ نقطةً صُغرى أمْ نقطةً عُظمى.

في الاقترانِ $f(x)$: $a = -3, b = 6$

بما أنَّ $a < 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للقطعِ المُكافِئِ يكونُ مفتوحًا للأسفلِ، ويمثّلُ الرأسُ نقطتَهُ العُظمى.

- **أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ.**

مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ $x = -\frac{b}{2a}$

بتعويضِ $a = -3, b = 6$ $= -\frac{6}{2(-3)}$

بالتبسيطِ $= 1$

إذنْ، مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ هِيَ $x = 1$.

- **أَجِدُ إحداثِيَّيِ الرأسِ.**

الاقترانُ المُعطى $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$

بتعويضِ $x = 1$ $f(1) = -3(1)^2 + 6(1) + 5$

بالتبسيطِ $= 8$

إذنْ، إحداثِيّا الرأسِ $(1, 8)$.

الخُطوَةُ 2 أَجِدُ نقطةَ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y.

لإيجادِ نقطةِ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y، أُعَوِّضُ $x = 0$ في قاعدةِ الاقترانِ.

الاقترانُ المُعطى $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$

بتعويضِ $x = 0$ $f(0) = -3(0)^2 + 6(0) + 5$

بالتبسيطِ $= 5$

إذنْ، نقطةُ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y هِيَ $(0, 5)$.

الخُطوَةُ 3 أَجِدُ نقطةً أُخرى باختيارِ قيمةٍ لِـ x تقعُ في الجانبِ الذي يقعُ فيهِ المقطعُ y يمينَ محورِ التَّماثُلِ أوْ يسارَهُ.

أختارُ $x = -1$

الاقترانُ المُعطى $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$

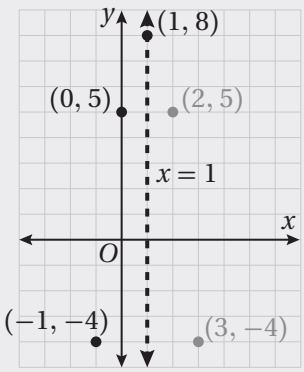
بتعويضِ $x = -1$ $f(-1) = -3(-1)^2 + 6(-1) + 5$

بالتبسيطِ $= -4$

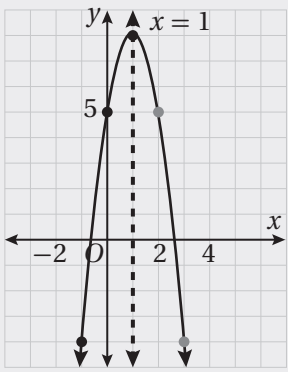
إذنْ، النقطةُ الأُخرى هِيَ $(-1, -4)$.

الخُطوَةُ 4 أمثّلُ النقاطَ في المُستوى الإحداثيِّ.

أمثّلُ رأسَ القطعِ والنقطتَيْنِ اللتَيْنِ أوجدتُهما مِنَ الخُطوتَيْنِ 2 وَ 3، وَهُما $(0, 5)$ وَ $(-1, -4)$، ثمَّ أستعملُ التَّماثُلَ لأعكِسَ النقطتَيْنِ $(0, 5)$ وَ $(-1, -4)$ حولَ محورِ التَّماثُلِ؛ لإيجادِ نقطتَيْنِ أُخرَيَيْنِ عَلى التمثيلِ البيانيِّ.



الخُطوَةُ 5 أصِلُ بينَ النقاطِ بِمُنحنًى أملَسَ.



• جمعُ المقاديرِ الجبريةِ وطرحُها (الدرسُ 1)

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

19 $(3np + 5w) + (w - 10np)$

20 $(-z + 2xy) + (xy + 4z)$

21 $(14x^2 - 19x) + (-6x^2 + x)$

22 $(10b^2 - 3b) + (b^2 - 2b)$

23 $(7cr - 3q) + (2cr + 7q)$

24 $(7xy + 4c) + (3xy - 8c)$

25 $(4x + 4c^2) + (6x - 2c^2)$

26 $(19t + 13s^2) + (4s^2 - t)$

مثالٌ: أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $(6pn - 3q) + (2pn + 7q)$

$= (6pn + 2pn) + (7q - 3q)$ الخاصيَّةُ التجميعيَّةُ والتبديليّةُ في الجمعِ

$= 8pn + 4q$ أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ

b) $(4x^2y + t) + (3t - x^2y)$

$= (4x^2y - x^2y) + (t + 3t)$ الخاصيَّةُ التجميعيَّةُ والتبديليّةُ في الجمعِ

$= 3x^2y + 4t$ أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ

• ضربُ المقاديرِ الجبريةِ (الدرسُ 1)

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

27 $6 \times (-3b)$

28 $-2 \times (4w)$

29 $-2u \times 5u$

30 $8d \times (-7d)$

31 $3xy \times (-xy^2)$

32 $(-dq^2)(-3qd)$

33 $(b+4)(b+1)$

34 $(3x-1)(4x-x^2+2)$

35 $(4-p)(2p-p^2+1)$

مثالٌ: أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $2x(3x-y)$

$2x(3x-y) = 6x^2 - 2xy$ — أضربُ حدًّا جبريًّا في مقدارٍ جبريٍّ

b) $(x+4)(x+3)$

$(x+4)(x+3)$

$= x(x+3) + 4(x+3)$ — أفصلُ المقدارَ $(x+4)$ إلى حدَّيْنِ x ، 4
ثم أضربُ كلًّا منْهُما في المقدارِ $(x+3)$

$= (x^2 + 3x) + (4x + 12)$ — أستخدمُ خاصيَّةَ التوزيعِ

$= x^2 + (3x + 4x) + 12$ — أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ

$= x^2 + 7x + 12$ — أكتبُ المقدارَ في أبسطِ صورةٍ

• تحليلُ ثلاثِيِّ الحدودِ ax^2+bx+c (الدرسُ 1)

أُحَلِّلُ كلًّا ممّا يأتي:

36 $3x^2+11x+6$

37 $8x^2-30x+7$

38 $6x^2+15x-9$

39 $4x^2-4x-35$

40 $12x^2+36x+27$

41 $6r^2-14r-12$

مثالٌ: أُحَلِّلُ المقدارَ: $3x^2-14x+8$

بما أنَّ $a=3, b=-14, c=8$، فأبحثُ عنْ عددَيْنِ حاصلُ ضربِهما $3\times8=24$ ومجموعُهُما -14

بما أنَّ b سالبةٌ وَ c موجبةٌ، فَأُنْشِئُ جدولًا أُنَظِّمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 24 السالبةَ، ثمَّ أُحَدِّدُ العامِلَيْنِ اللذَيْنِ مجموعُهُما -14

مجموعُ العامِلَيْنِ	أزواجُ عواملِ العددِ 24
-25	$-1, -24$
-14	$-2, -12$ ← العاملانِ الصَّحيحانِ

بكتابةِ القاعدةِ $3x^2-14x+8=3x^2+mx+nx+8$

بتعويضِ $m=-2, n=-12$ $=3x^2-2x-12x+8$

بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المُشتَرَكةِ $=(3x^2-2x)+(-12x+8)$

بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المُشتَرَكِ الأكبرِ $=x(3x-2)+(-4)(3x-2)$

بإخراجِ $(3x-2)$ عاملًا مُشتَرَكًا $=(3x-2)(x-4)$

• تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ (الدرسُ 2)

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

42 $\frac{6x(x+3)}{9x^2}$

43 $\frac{b^2+5b+4}{b^2-2b-24}$

44 $\frac{2x^3-18x}{6x^3-12x^2-18x}$

45 $\frac{x^3-8}{x^2-4}$

46 $\frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

47 $\frac{32x^4-50}{4x^3-12x^2-5x+15}$

مثالٌ: أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\frac{2x-10}{2x^2-11x+5}$

$$\frac{2x-10}{2x^2-11x+5}=\frac{2(x-5)}{(2x-1)(x-5)}$$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$$=\frac{2\cancel{(x-5)}}{(2x-1)\cancel{(x-5)}}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(x-5)$

$$=\frac{2}{2x-1}$$ بالتبسيطِ

b) $\frac{1-u^2}{u^2+4u-5}$

$$\frac{1-u^2}{u^2+4u-5}=\frac{(1-u)(1+u)}{(u-1)(u+5)}$$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$$=\frac{-(u-1)(1+u)}{(u-1)(u+5)}$$ $1-u=-(u-1)$

$$=\frac{-\cancel{(u-1)}(1+u)}{\cancel{(u-1)}(u+5)}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(u-1)$

$$=\frac{-(u+1)}{u+5}$$ بالتبسيطِ

• حلُّ التناسباتِ (الدرسُ 3)

أحُلُّ كُلًّا منَ التناسباتِ الآتيةِ:

48 $\frac{5}{4}=\frac{20}{x}$

49 $\frac{x}{12-x}=\frac{10}{30}$

50 $\frac{12}{x-2}=\frac{32}{x+8}$

مثالٌ: أحُلُّ التناسبَ الآتيَ: $\frac{4}{x-4}=\frac{5}{x+4}$.

التناسبُ المعطى	$\frac{5}{x+4}=\frac{4}{x-4}$
بالضربِ التبادليِّ	$4(x+4)=5(x-4)$
باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ	$4x+16=5x-20$
بطرحِ $5x$ منْ طرفي المعادلةِ	$-x+16=-20$
بطرحِ 16 منْ طرفي المعادلةِ	$-x=-36$
بقسمةِ طرفي المعادلةِ على -1	$x=36$

• حلُّ المعادلاتِ باستعمالِ الجذرِ التربيعيِّ (الدرسُ 4)

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الآتيةِ، وأتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

51 $324=b^2$

52 $x^2=\frac{9}{36}$

53 $y^2=1.96$

مثالٌ: أحلُّ المعادلةَ $t^2 = \frac{1}{36}$، وأتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

المعادلةُ الأصليةُ	$t^2 = \frac{1}{36}$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$t = \pm\sqrt{\frac{1}{36}}$
أجدُ قيمةَ الجذرِ	$= \pm\frac{1}{6}$

أتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

عندما $x = \frac{1}{6}$

$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$

$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ ✓

عندما $x = -\frac{1}{6}$

$\left(-\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$

$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ ✓

- **إيجادُ حدودِ متتاليةٍ** (الدرسُ 5)

أَجِدُ الحدَّيْنِ التاليَيْنِ للمتتالياتِ الآتيةِ:

54 4, 7, 10, 13, ….

55 100, 94, 88,82, ….

56 3, 6, 11, 18, ….

مثالٌ: أَجِدُ الحدَّيْنِ التاليَيْنِ للمتتاليةِ: **2, 7, 12, 17, …**

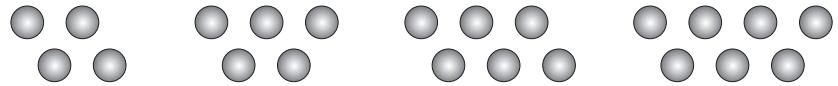
أُلاحِظُ أنَّ كلَّ حدٍّ يزيدُ على الحدِّ الذي يسبقُهُ بمقدارٍ ثابتٍ هوَ **5**:

$7-2 = 12-7 = 17-12 = 5$

إذنْ، الحدّانِ التاليانِ هما: $17 + 5 = 22$, $22 + 5 = 27$

• إيجادُ الحدِّ العامِّ لمُتتاليةِ نمطٍ هندسيٍّ (الدرسُ 5)

في ما يأتي نَمَطٌ هندسِيٌّ يشكِّلُ عددُ الدوائرِ فيهِ متتاليةً:



النموذجُ (4) النموذجُ (3) النموذجُ (2) النموذجُ (1)

57 أجدُ القاعدةَ التي تربطُ كلَّ حدٍّ في المتتاليةِ بالحدِّ الذي يليهِ.

58 أكتبُ قاعدةَ الحدِّ العامِّ.

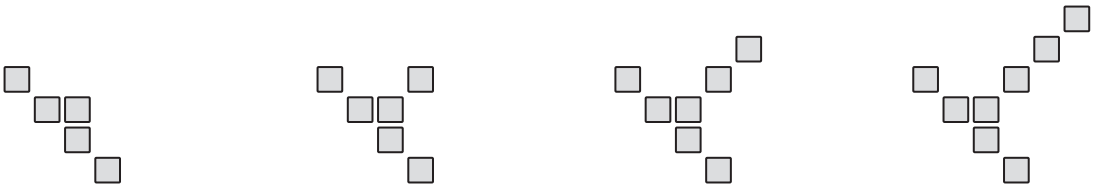
59 ما عددُ الدوائرِ في الحدِّ الذي رتبتُهُ 12؟

في ما يأتي نَمَطانِ هنْدَسِيّانِ، يُشكِّلُ عددُ المُربَّعاتِ في كُلٍّ منهما مُتَتالِيةً. أجدُ قاعدةَ الحدِّ العامِّ لكُلٍّ منهُما، ثُمَّ أرسُمُ الحَدَّ العاشِرَ.

60

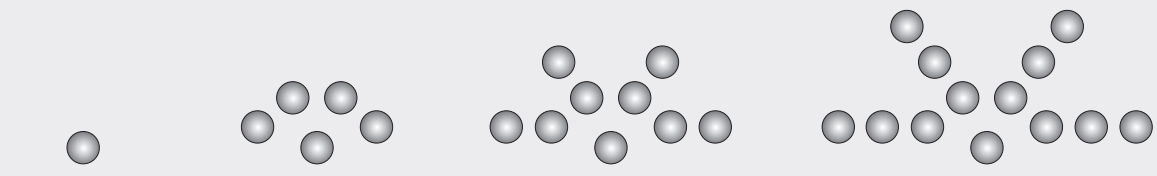
الشَّكْلُ (4) الشَّكْلُ (3) الشَّكْلُ (2) الشَّكْلُ (1)

61



الشَّكْلُ (4) الشَّكْلُ (3) الشَّكْلُ (2) الشَّكْلُ (1)

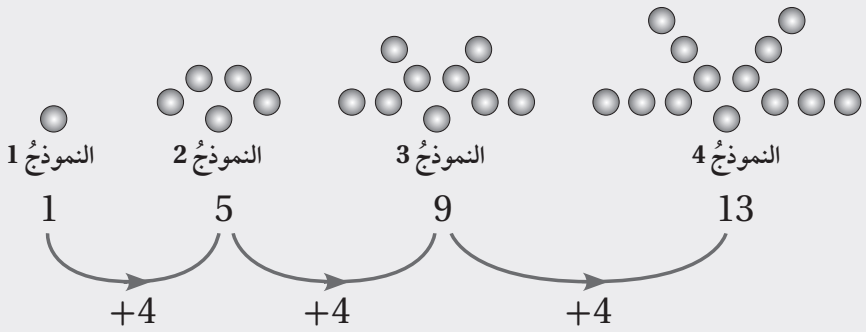
مثالٌ: في ما يأتي نَمَطٌ هندسِيٌّ يشكِّلُ عددُ الدوائرِ فيهِ متتاليةً:



النموذجُ الرابعُ النموذجُ الثالثُ النموذجُ الثاني النموذجُ الأوّلُ

a) **أجدُ القاعدةَ التي تربطُ كلَّ حدٍّ في المتتاليةِ بالحدِّ الذي يليهِ:**

بالانتقالِ منَ الحدِّ إلى الحدِّ الذي يليهِ، أجدُ أنَّ 4 دوائرَ قدْ أُضيفَتْ. إذنْ، كلُّ حدٍّ أكبرُ منَ الحدِّ الذي يسبِقُهُ بِـ 4.



b) **أكتبُ قاعدةَ الحدِّ العامِّ.**

تــزدادُ الحدودُ في المتتاليةِ بمقدارِ 4، وهذا يذكِّرُني بجدولِ ضربِ العددِ 4؛ إذْ إنَّ الفرقَ بينَ كلِّ ناتجَيْنِ يســاوي 4، لكــنَّ حدودَ المتتاليةِ أقلُّ بمقدارِ 3 منَ النواتجِ في جدولِ ضربِ العــددِ 4. إذنْ، قاعدةُ الحدِّ العامِّ هيَ: أضربُ رتبةَ الحدِّ في 4، ثمَّ أطرحُ 3.

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
1	× 4	4	−3	1
2	× 4	8	−3	5
3	× 4	12	−3	9
4	× 4	16	−3	13

c) **ما عددُ الدوائرِ في الحدِّ الذي رتبتُهُ 15؟**

لإيجــادِ عددِ الدوائرِ، فإنَّني أطبِّقُ قاعدةَ الحدِّ العامِّ على الحدِّ الذي رتبتُــهُ 15؛ أضربُ الرتبَةَ في 4، ثمَّ أطرحُ 3 منَ الناتجِ.

الرُّتبةُ				الحدُّ
15	× 4	60	−3	57

الدرسُ 1

اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ
Polynomial Functions

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا، مُحدِّدًا الدرجةَ والمعاملَ الرئيسَ والحدَّ الثابتَ لكلِّ كثيرِ حدودٍ، ثمَّ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ:

1. $h(x) = 3x^2 + 2x^{-1} + 5$
2. $g(x) = 3\frac{1}{5}x^2 - 5x^3 + 7x - 1$
3. $f(x) = \frac{8(3-2x)}{5}$
4. $j(x) = \sqrt{x^2+16} - 4x$

أُمثِّلُ بيانيًّا كلًّا ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

5. $f(x) = 2x^3 - 5, -2 \le x \le 3$
6. $r(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5, -2 \le x \le 2$
7. $g(x) = 12 - 4x - x^2$
8. $h(x) = (2x-5)^2 - 10$

إذا كانَ $f(x) = 2x^2 - 4x^3 + 5x - 1$، وَ$g(x) = x^3 + 5x^2 - 7$، وَ$h(x) = 2x - 4$، فأَجِدُ ناتجَ ما يأتي:

9. $f(x) + g(x)$
10. $f(x) - g(x)$
11. $g(x) - x(h(x))$
12. $h(x) \cdot f(x)$
13. $(h(x))^2 + f(x)$
14. $f(x) \cdot g(x)$

15. هلِ العددُ -2 صفرٌ للاقترانِ $h(x) = -x^4 - 5x^3 + 7x - 10$؟ أُبرِّرُ إجابتي.
16. أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ $g(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2$

يمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 2t^3 - 20t^2 + 5t - 50$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً.

17. أحدّدُ موقعَ الجسمِ لحظةَ بدءِ الحركةِ.
18. أحدّدُ موقعَ الجسمِ بعدَ ثانيتينِ منْ بدءِ الحركةِ.
19. متى يكونُ الجسمُ عندَ نقطةِ الأصلِ؟
20. هلْ يعودُ الجسمُ إلى النقطةِ التي بدأَ الحركةَ منْها؟

الدرسُ 2

قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتِ النسبيةِ
Dividing Polynomials and Rational Functions

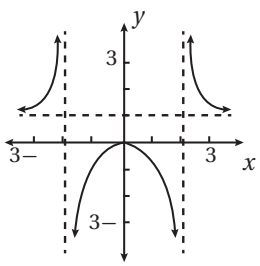
أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x)$ على $h(x)$ وباقيها في كلٍّ ممّا يأتي:

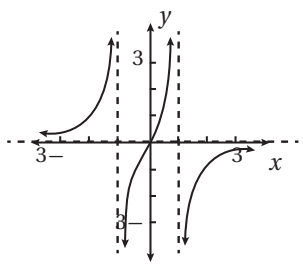
1. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 12x + 5;\ h(x) = x + 4$
2. $f(x) = 4x^4 - 6x^3 - 9x + 12;\ h(x) = 2x^2 - 5x + 2$
3. أَجِدُ قيمةَ k بحيثُ يكونُ باقي قسمةِ $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 7x + k$ على $h(x) = 2x + 1$ هوَ 8
4. أَجِدُ قيمةَ c بحيثُ يكونُ $h(x) = x - 3$ أحدَ عواملِ $g(x) = 2x^4 - 5x^3 + cx - 18$

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي، وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، ثمَّ أَجِدُ مجالَهُ ومداهُ:

5. $f(x) = 4 + \frac{2}{x-1}$
6. $h(x) = -\frac{3}{x+2} + 5$

أَجِدُ المجالَ والمدى وخطوطَ التقاربِ لكلٍّ منَ الاقترانيْنِ المُمثَّليْنِ بيانيًّا في ما يأتي:

7.


8.


أَجِدُ المجالَ والمدى لكلٍّ ممّا يأتي:

9. $g(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 5$
10. $j(x) = \frac{4}{(x+2)^2} + 3$

نُقِلَتْ فصيلةٌ نادرةٌ منَ الحشراتِ إلى محميةٍ خاصةٍ لمنعِ انقراضِها. وقدْ بلغَ عددُ أفرادِ هذهِ الفصيلةِ بعدَ t شهرًا منْ نقلِها $P(t) = \frac{72(1+0.6t)}{3+0.02t}$:

11. كمْ كانَ عددُ الحشراتِ عندَ نقلِها إلى المحميةِ؟
12. كمْ سيبلغُ عددُها بعدَ 30 شهرًا منْ نقلِها؟
13. بعدَ كمْ شهرٍ سيصلُ عددُها إلى 558 حشرةً؟

الدرسُ 3

تركيبُ الاقتراناتِ
Composition of Functions

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي، مُستعمِلًا القيمَ المُبيَّنةَ في الجدولَيْنِ الآتيينِ:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-7	-5	-3	-1	3	5	7

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	8	3	0	-1	0	3	8

1. $(f\circ g)(1)$
2. $(f\circ g)(-2)$
3. $(g\circ f)(1)$
4. $(g\circ f)(0)$
5. $(g\circ g)(-1)$
6. $(f\circ f)(-1)$

إذا كانَ $f(x)=2x+1$، وَ $g(x)=3x-4$، فأَجِدُ:

7. $(f\circ g)(2)$
8. $(f\circ g)(0)$
9. $(f\circ g)(8)$
10. $(g\circ f)(1)$
11. $(f\circ g)(x)$
12. $(g\circ f)(x)$

إذا كانَ $k(x)=\frac{1}{x+1}$، وَ $h(x)=\frac{2}{x}$، فأَجِدُ:

13. $(h\circ k)(3)$
14. $(k\circ h)(3)$
15. $(h\circ h)(6)$
16. $(k\circ k)(-3)$
17. $(k\circ h)(x)$
18. $(h\circ k)(x)$

أَجِدُ اقترانَيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يكونُ $h(x)=(g\circ f)(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

19. $h(x)=x^6+1$
20. $h(x)=4(x+1)^2$
21. $h(x)=2x^2-20x+50$
22. $h(x)=\sqrt{2x^2-4}+7$

23. يرتبطُ سعرُ سلعةٍ مُعيَّنةٍ وعددُ الوحداتِ المبيعةِ منْها بالعلاقةِ $p=100-\frac{x}{4}\ ,\ 0\le x\le 400$، حيثُ p السعرُ بالدينارِ، وَ x عددُ الوحداتِ المبيعةِ. إذا كانَتِ التكلفةُ C بالدنانيرِ لإنتاجِ x وحدةً هيَ $C=\frac{4\sqrt{x}}{0.5}+600$، فأَجِدُ التكلفةَ C في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى السعرِ p، ثمَّ أَجِدُ التكلفةَ إذا كانَ سعرُ الوحدةِ الواحدةِ 19 دينارًا.

الدرسُ 4

الاقترانُ العكسيُّ
Inverse Function

إذا كانَ $g(x)=80-\frac{100}{1+x}$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1. $g(9)$
2. $g(4)$
3. $g^{-1}(70)$
4. $g^{-1}(60)$

5. إذا كانَ $f(x)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، وَ $f(3)=8$، فماذا يُستنتَجُ منْ هذهِ المعطياتِ؟

6. إذا كانَ $f(x)$ يُمثِّلُ عددَ الوحداتِ المُنتَجةِ في x ساعةَ عملٍ لمُنتَجٍ مُعيَّنٍ، فماذا يُمثِّلُ المقدارُ $f^{-1}(2540)$؟

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ لكلٍّ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

7. $f(x)=3x-5$
8. $f(x)=4-7x$
9. $f(x)=x^2+3, x\geq 0$
10. $f(x)=5-9x^2, x\geq 0$
11. $f(x)=\frac{x}{2x+6}$
12. $f(x)=\frac{x}{8-4x}$
13. $f(x)=\sqrt{2x-1}+3$
14. $f(x)=\sqrt{3x+2}-5$
15. $f(x)=\sqrt[3]{3x-2}-1$
16. $f(x)=\sqrt[3]{3-4x}+1$

أُبيِّنُ إذا كانَ كلٌّ منَ الاقترانينِ $f(x)$، وَ $h(x)$ اقترانًا عكسيًّا للآخرِ أمْ لا:

17. $f(x)=2x-5, h(x)=5x+2$
18. $f(x)=\frac{2x}{3x+5}, \ h(x)=\frac{5x}{2-3x}$

19. أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)=\sqrt{6+3x}$، ثمَّ أُمثِّلُ $f(x)$، وَ$f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

20. **هندسةٌ:** تُعطى مِساحةُ الدائرةِ بالاقترانِ $A(r)=\pi r^2$، حيثُ A المِساحةُ، وَ r نصفُ القُطْرِ. أُعبِّرُ عنْ r في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى المِساحةِ A، ثمَّ أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ دائرةٍ مِساحتُها $250\,\text{cm}^2$

21. **فيزياءُ:** يُعطى زمنُ الدورةِ T ثانيةً لبندولٍ بسيطٍ بالاقترانِ $T(\ell)=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيثُ ℓ طولُ البندولِ بالأمتارِ. أُعبِّرُ عنْ ℓ في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى الزمنِ T، ثمَّ أَجِدُ طولَ بندولٍ زمنُ دورتِهِ 3 s

الدرسُ 5

المتتالياتُ
Sequences

أكتبُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1. 4, 6, 8, 10, …
2. 3, 30, 300, 3000, …
3. 1, 4, 9, 16, …
4. 2, 4, 8, 16, …
5. 3, 10, 17, 24, …
6. 0, 4, 18, 48, ...

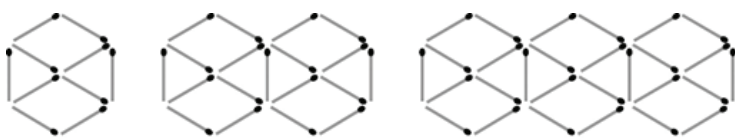
أُصنِّفُ المتتالياتِ الآتيةَ إلى خطِّيةٍ، وتربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، ثمَّ أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ الأولى والحدَّ العشرينَ لكلٍّ منْها:

7. $\mathrm{T}(n) = 3n + 1$
8. $\mathrm{T}(n) = 2n^2 + 1$
9. $\mathrm{T}(n) = 5n^3 + 2$
10. $\mathrm{T}(n) = n(n^2 + 1)$

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

11. 6, 11, 16, 21, 26, …
12. $-4, 3, 22, 59, 120, ...$
13. 0, 3, 8, 15, ...
14. 5, 11, 21, 35, 53, ...

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددُ أعوادِ الثقابِ فيهِ متتاليةً:



1 2 3

15. أرسمُ النموذجَ الرابعَ في هذا النمطِ.
16. أَجِدُ عددَ أعوادِ الثقابِ اللازمةِ لبناءِ النموذجِ رقمِ 20 في هذا النمطِ.
17. ما أكبرُ مجموعةٍ منَ النماذجِ يُمكِنُ بناؤُها باستعمالِ 100 عودٍ منَ الثقابِ؟

أختبِرُ مَعلوماتي بحلِّ التدريباتِ أوّلًا، وفي حالِ عَدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المُعطى.

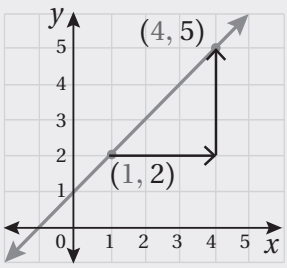
• إيجادُ ميلِ المستقيمِ (الدرسُ 1)

أجدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتَينِ ممّا يأتي:

1. $(3, 3), (5, 7)$
2. $(6, 1), (4, 3)$
3. $(-2, -6), (-2, 6)$
4. $(5, -7), (0, -7)$
5. $(-1, 0), (0, -5)$
6. $(4, 1), (12, 8)$
7. $(-1, 2), (3, 5)$
8. $(-1, -2), (-4, 1)$
9. $(1, 2), (-3, 2)$
10. $(1, 5), (1, -4)$

مثالٌ: أجدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتَينِ ممّا يأتي:

a) (1, 2), (4, 5)



صيغةُ الميلِ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

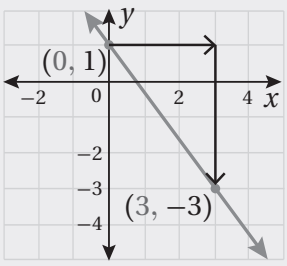
أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(1, 2)$

وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(4, 5)$ $= \dfrac{5 - 2}{4 - 1}$

أُبسِّطُ $= \dfrac{3}{3} = 1$

إذنْ، مَيلُ المستقيمِ هو 1

b) (0, 1), (3, −3)



صيغةُ الميلِ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

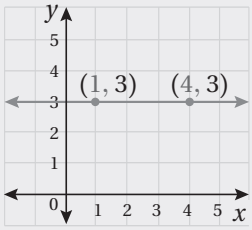
أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(0, 1)$

وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(3, -3)$ $= \dfrac{-3 - 1}{3 - 0}$

أُبسِّطُ $= -\dfrac{4}{3}$

إذنْ، مَيلُ المستقيمِ هو $-\dfrac{4}{3}$

c) (1, 3), (4, 3)



صيغةُ الميلِ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

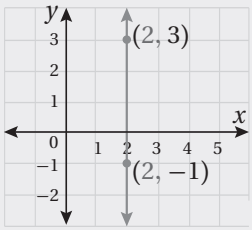
أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(1, 3)$

وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(4, 3)$ $= \dfrac{3 - 3}{4 - 1}$

أُبسِّطُ $= \dfrac{0}{3} = 0$

إذنْ، مَيلُ المستقيمِ هو 0

d) (2, 3), (2, −1)



صيغةُ الميلِ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(1, 3)$

وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(2, -1)$ $= \dfrac{-1 - 3}{2 - 2}$

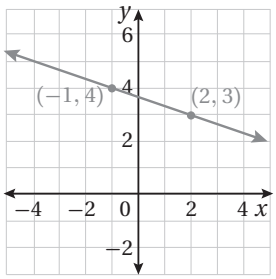
أُبسِّطُ $= \dfrac{-4}{0}$

إذنْ، ميلُ هذا المستقيمِ غيرُ مُعرَّفٍ.

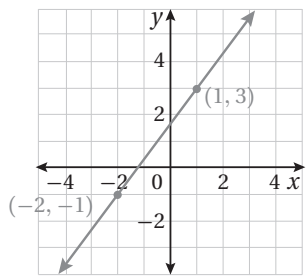
• إيجادُ ميل مستقيمٍ ممثَّلٍ بيانيًّا (الدرسُ 1)

أجدُ ميلَ المستقيمِ الممثَّلِ بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

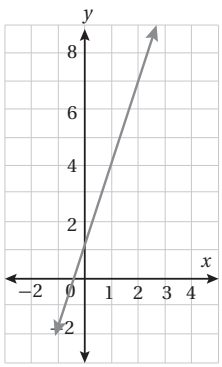
11



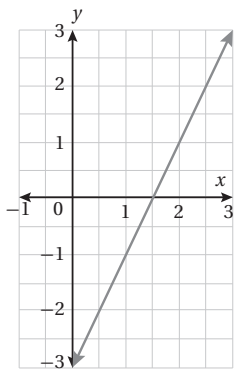
12



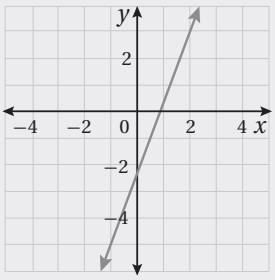
13



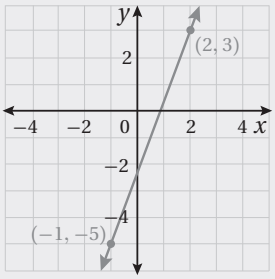
14



مثالٌ: أجدُ ميلَ المستقيمِ الممثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ.



أختارُ نقطتينِ على المستقيمِ وأجدُ الميلَ.



صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوّضُ عَنْ (x_1, y_1) بِـ $(-1, -5)$
وَعَنْ (x_2, y_2) بِـ $(2, 3)$ $= \frac{3 - (-5)}{2 - (-1)}$

أُبسّطُ $= \frac{8}{3}$

• حَلُّ المعادلاتِ الخطِّيةِ (الدرسُ 2)

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

15 $5x + 5 = 4 - 7x$

16 $2(1 - 2x) = 8x - 3$

17 $3(4x - 2) = 8(x + 6)$

مثالٌ: أَحُلُّ المعادلةَ $3x + 5 = x - 3$

المعادلةُ الأصليةُ	$3x + 5 = x - 3$
بطرحِ x منَ الطرفيْنِ	$2x + 5 = -3$
بطرحِ 5 منَ الطرفيْنِ	$2x = -8$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 2	$x = -4$

• حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ (الدرسُ 2)

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

18 $x^2 - 3x + 2 = 0$

19 $x^2 + 6x + 9 = 0$

20 $x^2 - 4x + 7 = 0$

مثالٌ: أَحُلُّ المعادلةَ: $x^2 + x - 6 = 0$

أَحُلُّ هذهِ المعادلةَ باستعمالِ التحليلِ إلى العواملِ:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

بالتحليلِ إلى العواملِ $(x + 3)(x - 2) = 0$

خاصيةُ الضربِ الصفريِّ $x + 3 = 0, x - 2 = 0$

بحَلِّ المعادلتيْنِ الناتجتيْنِ $x = -3, \quad x = 2$

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x_1 = -3, x_2 = 2$

يُمكِنُ أيضًا حَلُّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

أَجِدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1, b = 1, c = -6$

القانونُ العامُّ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

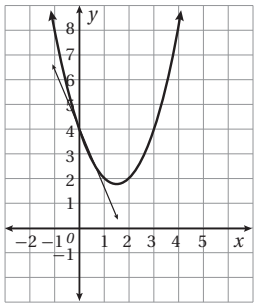
بالتعويضِ، والتبسيطِ $= \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$x_1 = \dfrac{-1-5}{2}, x_2 = \dfrac{-1+5}{2}$

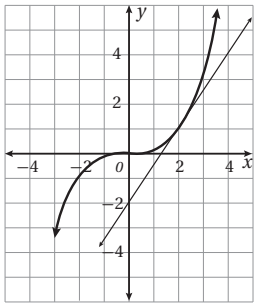
إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x_1 = -3, x_2 = 2$

الدرسُ 1

تقديرُ ميلِ المنحنى
Estimating Slope



1 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^2 - 3x + 4$ عندَ النقطةِ $A(0, 4)$. أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A.



2 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = \frac{1}{8}x^3$ عندَ النقطةِ $A(2, 1)$. أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A.

3 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = x^3 - 3x + 1$ عندَ النقطةِ $(2, 3)$.

4 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = 4x - 3x^2$ عندَ النقطةِ $(2, -4)$.

5 يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 40t - 16t^2$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالمترِ، وَt الزمنُ بالثواني. أُقدِّرُ سرعةَ الجسمِ اللحظيةَ بعدَ ثانيتيْنِ.

أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ في الفترةِ $-2 \le x \le 2$

باستعمالِ جدولِ القيمِ المجاورِ:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-7	-2	1	2	1

6 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$.

7 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$.

8 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟

أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ في الفترةِ $-1 \le x \le 3$

باستعمالِ جدولِ القيمِ المجاورِ:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4

9 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$.

10 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$.

11 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟

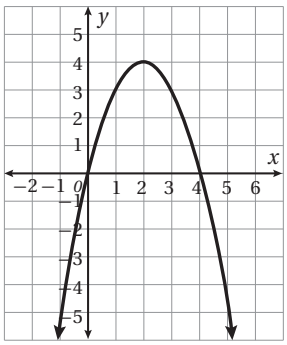
الدرسُ 2

الاشتقاقُ
Differentiation

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1. $f(x) = -\frac{7}{3}$
2. $f(x) = \frac{8}{5}$
3. $f(x) = -6x$
4. $f(x) = 3.2x$
5. $f(x) = 3x^{41}$
6. $f(x) = -x^{64}$
7. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$
8. $f(x) = 7x^3 + 6x^2 - x$
9. $f(x) = (x + 4)(x - 2)$
10. $f(x) = (x - 5)^2$

أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لمنحنى الاقترانِ $f(x) = 4x - x^2$ في الشكلِ المجاورِ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



11. أَجِدُ $f'(x)$.
12. أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ نقطتَيْ تقاطعِهِ معَ محورِ x
13. أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يكونُ عندَها الميلُ 1
14. أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يكونُ عندَها الميلُ -2

أَجِدُ قيمةَ $f'(-1)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

15. $f(x) = x^2 - 3x + 1$
16. $f(x) = x^3 - x^2 - 2$

17. أَجِدُ النقطةَ التي يكونُ عندَها ميلُ منحنى $f(x) = x^2 - 5x + 6$ يساوي -9

إذا كانَ $f(x) = x^2 + 5x + 7$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

18. ميلُ المنحنى $f(x)$ عندَما $x = 2$
19. قيمةُ x التي يكونُ عندَها ميلُ منحنى $f(x)$ يساوي 0
20. تُمثِّلُ العلاقةُ $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$ الموقعَ (بالمترِ) لجسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ t الزمنُ بالثواني. أَجِدُ سرعةَ الجسمِ عندَما $t = 2$
21. إذا كانَ $f(x) = a\,x^n + b$، حيثُ a، وَ b عددانِ حقيقيانِ، وَ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فأَجِدُ $f'(x)$

الدرسُ 3

القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى
Maximum and Minimum Values

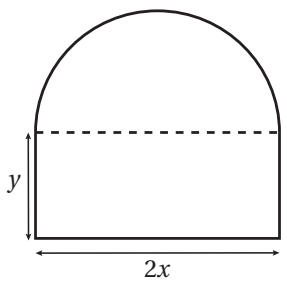
أَجِدُ القيمَ العظمى والقيمَ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = -3$
3. $f(x) = 2x - 1$
4. $f(x) = 5x + 3$
5. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
6. $f(x) = x^2 - 8x + 7$
7. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$
8. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$
9. $f(x) = x^3(4 - x)$
10. $f(x) = (x + 1)(x - 2)$

11. أَجِدُ قيمةَ الثابتِ k، علمًا بأنَّ للاقترانِ $f(x) = kx^2 + x$ قيمةً حرجةً عندَما $x = 1$

12. أَجِدُ العددَيْنِ الموجبَيْنِ اللذَيْنِ مجموعُهُما 150، وحاصلُ ضربِهِما أكبرُ ما يُمكِنُ.

13. يُمثِّلُ الاقترانُ $A(x) = x(9 - x)$ مِساحةَ غرفةٍ مستطيلةٍ في مُخطَّطٍ أَعدَّتْهُ المهندسةُ شفاءُ، حيثُ x الطولُ بالمترِ. أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للغرفةِ.



يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ حديقةً محيطُها 80 m، وهيَ على شكلِ مستطيلٍ طولُهُ $2x$ مترًا، وعرضُهُ y مترًا، وبجانبِهِ نصفُ دائرةٍ:

14. أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 80x - (2 + \frac{\pi}{2})x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ الحديقةِ.

15. أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ الحديقةِ أكبرَ ما يُمكِنُ.

16. أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للحديقةِ.

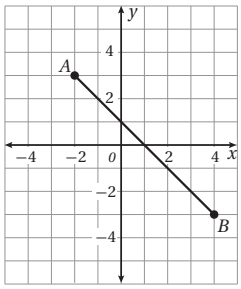
17. أَجِدُ قيمتَيِ الثابتَيْنِ a, b إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + ax + b$ قيمةٌ حرجةٌ عندَ النقطةِ $(-4, -3)$، ثمَّ أُحدِّدُ نوعَ القيمةِ الحرجةِ، مُبرِّرًا إجابتي.

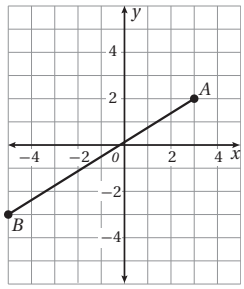
الوحدةُ 7: المتجهاتُ

أختبِرُ مَعلوماتي بحلِّ التدريباتِ أوّلًا، وفي حالِ عَدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المُعطى.

إيجادُ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ (الدرسُ 1)

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطتيْنِ A و B في كلٍّ ممّا يأتي:

1 

2 

3 $A(-5, -7), B(2, -3)$

4 $A(8, 0), B(-4, -5)$

5 $A(-4, 7), B(-3, 6)$

مثالٌ: أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطتيْنِ: **(−8, −2)**، وَ **(−6, −5)**.

قانونُ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

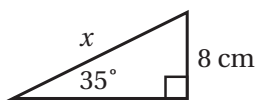
بتعويضِ إحداثياتِ النقطتيْنِ $= \sqrt{(-6 - (-2))^2 + (-5 - (-8))^2}$

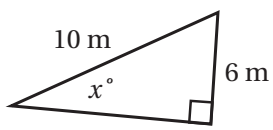
بالتبسيطِ $= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

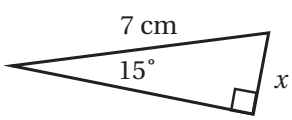
إذنْ، المسافةُ بينَ النقطتيْنِ: (−8, −2)، وَ (−6, −5) هيَ 5 وحداتِ طولٍ.

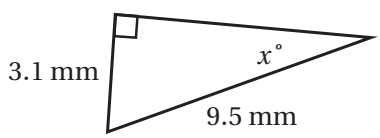
استعمالُ النسبِ المثلثيةِ في إيجادِ أطوالِ أضلاعٍ في مثلثٍ (الدرسُ 1)

أستعملُ النسبةَ المثلثيةَ المناسبةَ لإيجادِ قيمةِ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ، ثمَّ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ الحادةِ الكبرى:

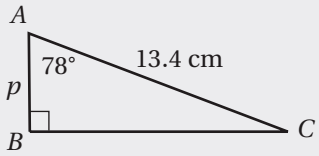
6 

7 

8 

9 

مثالٌ: أستعملُ النسبةَ المثلثيةَ المناسبةَ لإيجادِ طولِ $\overline{AB}$ في المثلثِ الآتي، ثمَّ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ للزاويةِ A:



الضلعُ المجهولُ $\overline{AB}$ مجاورٌ للزاويةِ A؛ لذا أستعملُ نسبةَ جيبِ التمامِ للزاويةِ A:

تعريفُ نسبةِ جيبِ التمامِ $\cos A = \frac{\text{المجاورَ}}{\text{الوترِ}}$

بتعويضِ القياساتِ المعلومةِ $\cos 78° = \frac{p}{13.4}$

بتعويضِ قيمةِ $\cos 78°$ $0.21 = \frac{p}{13.4}$

بالضربِ التبادليِّ $p = (0.21)\,(13.4)$

بالتبسيطِ $p = 2.81$

لحسابِ نسبتَيِ الجيبِ والظلِّ للزاويةِ A، يجبُ معرفةُ طولِ الضلعِ المقابلِ لها. وبما أنَّ المثلثَ قائمُ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ نظريةَ فيثاغورس:

نظريةُ فيثاغورس $(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$

بالتعويضِ $(13.4)^2 = (BC)^2 + (2.81)^2$

بالتبسيطِ $179.56 = (BC)^2 + 7.90$

بطرحِ 7.90 $179.56 - 7.90 = (BC)^2$

بالتبسيطِ $171.66 = (BC)^2$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ $13.10 = BC$

أستطيعُ الآنَ حسابَ نسبتَيِ الجيبِ والظلِّ للزاويةِ A:

تعريفُ نسبةِ الجيبِ $\sin A = \frac{\text{المقابلَ}}{\text{الوترِ}}$

بالتعويضِ $\sin 78° = \frac{13.10}{13.4}$

بالتبسيطِ $\sin 78° \approx 0.98$

تعريفُ نسبةِ الظلِّ $\tan A = \frac{\text{المقابلَ}}{\text{المجاورِ}}$

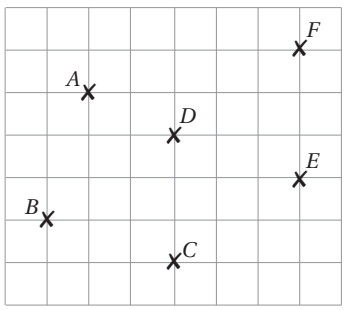
بتعويضِ القياساتِ المعلومةِ $\tan 78° = \frac{13.10}{2.79}$

بالتبسيطِ $\tan 78° \approx 4.7$

الدرسُ 1

المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ
Vectors in the Coordinate Plane

إذا كانَ $\overrightarrow{AD} = \langle -1, 2 \rangle$، فأكتبُ كلًّا ممّا يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:



1. $\overrightarrow{AF}$
2. $\overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{CA}$
4. $\overrightarrow{EB}$
5. $\overrightarrow{EF}$
6. $\overrightarrow{DC}$

7. أكتبُ كلًّا منْ $\overrightarrow{BD}$ ، وَ $\overrightarrow{BF}$ بالصورةِ الإحداثيةِ. ماذا أستنتجُ منْ موقعِ B، وَD، وَF؟

أستعملُ إحداثيَّيِ النقطةِ $A(6, 3)$ للإجابةِ عنِ المسائلِ الآتيةِ:

8. إذا كانَ $\overrightarrow{AB} = \langle -5, 2 \rangle$ ، فأَجِدُ إحداثيَّيِ النقطةِ B.

9. إذا كانَ $\overrightarrow{AC} = \langle 4, -3 \rangle$ ، فأَجِدُ إحداثيَّيِ النقطةِ C.

10. إذا كانَ $\overrightarrow{AD} = \langle 0, 6 \rangle$ ، فأَجِدُ إحداثيَّيِ النقطةِ D.

11. **شاحناتٌ:** أكتبُ بالصورةِ الإحداثيةِ السرعةَ المتجهةَ لشاحنةٍ تسيرُ على طريقٍ مُنحدِرٍ، علمًا بأنَّ سرعتَها الأفقيةَ $v_x = 58 \text{ km/}h$، وسرعتَها الرأسيةَ $v_y = 37 \text{ km/}h$.

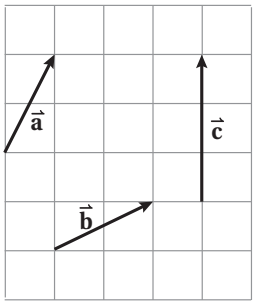
12. يدفعُ صالحٌ مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارُها 272 N، وبزاويةٍ قياسُها $51°$ معَ المحورِ الأفقيِّ. أكتبُ متجهَ القوةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.

13. إذا كانَ $|\overrightarrow{AB}| = 7$، حيثُ $A(-1, 4)$ هيَ نقطةُ بدايتِهِ، والنقطةُ $B(x, 2)$ هيَ نقطةُ نهايتِهِ، فأَجِدُ قيمةَ x ، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرسُ 2

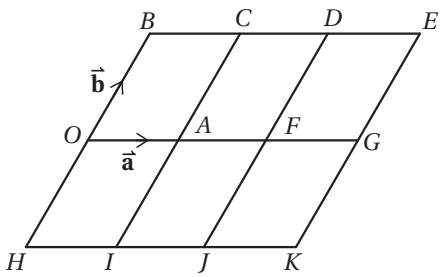
جمعُ المتجهاتِ وطرحُها
Adding and Subtracting Vectors

أُمثِّلُ بيانيًّا كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ:



1. $\vec{a} + \vec{b}$
2. $-\vec{a}$
3. $\vec{a} - \vec{c}$
4. $\vec{b} - \vec{a}$
5. $-\vec{c}$
6. $-\vec{a}-\vec{b}$

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ الذي يبيّنُ مجموعتينِ من المستقيماتِ المتوازيةِ، أكتبُ كلاًّ منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\vec{a}$ و $\vec{b}$



7. $\overrightarrow{OH}$
8. $\overrightarrow{OK}$
9. $\overrightarrow{OJ}$
10. $\overrightarrow{OI}$
11. $\overrightarrow{OC}$
12. $\overrightarrow{CO}$
13. $\overrightarrow{AK}$
14. $\overrightarrow{DI}$
15. $\overrightarrow{JE}$
16. $\overrightarrow{AB}$
17. $\overrightarrow{CK}$
18. $\overrightarrow{DK}$

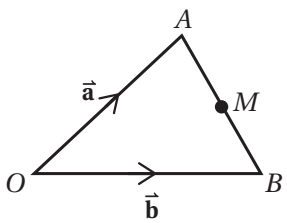
الدرسُ 2

تابع

جمعُ المتجهاتِ وطرحُها
Adding and Subtracting Vectors

في الشكلِ المجاورِ، M هيَ نقطةُ منتصفِ $\overline{AB}$

أكتبُ كلاًّ منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ المتجهيْنِ $\vec{\mathbf{a}}$، وَ $\vec{\mathbf{b}}$:



19 $\overrightarrow{AB}$

20 $\overrightarrow{BO}$

21 $\overrightarrow{AM}$

22 $\overrightarrow{OM}$

23 أُحدِّدُ على الشكلِ موقعَيِ النقطتيْنِ X، وَ Y، بحيثُ يكونَ $\overrightarrow{OX} = 2\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}, \overrightarrow{OY} = \vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}}$.

24 أكتبُ $\overrightarrow{XY}$ بدلالةِ $\vec{\mathbf{a}}$، وَ $\vec{\mathbf{b}}$

25 ما المتجهاتُ الأُخرى المكافئةُ لـ $\overrightarrow{XY}$؟

إذا كانَ $\vec{\mathbf{a}} = \langle 27, -15 \rangle, \vec{\mathbf{b}} = \langle 9, -21 \rangle, \vec{\mathbf{c}} = \langle -12, 0 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

26 $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{c}}$

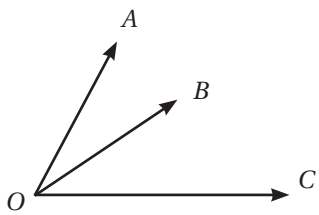
27 $\vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{a}}$

28 $3\vec{\mathbf{c}} - \vec{\mathbf{b}}$

29 $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{c}}$

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المتجهاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ O هيَ نقطةُ الأصلِ:

$\overrightarrow{OA} = \langle 2, 2 \rangle$ $\overrightarrow{OB} = \langle 4, 1 \rangle$ $\overrightarrow{OC} = \langle 6, 0 \rangle$



أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أرسمُهُ على الشكلِ:

30 $\overrightarrow{AB}$

31 $\overrightarrow{AC}$

32 $\overrightarrow{BC}$

الدرسُ 3

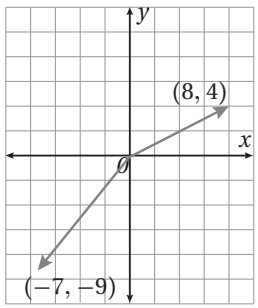
الضربُ القياسيُّ
Scalar Product

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

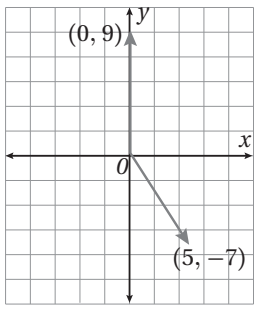
1 $\vec{\mathbf{a}} = \langle -1, 5 \rangle$, $\vec{\mathbf{b}} = \langle -6, -2 \rangle$

2 $\vec{\mathbf{u}} = \langle 3, 9 \rangle$, $\vec{\mathbf{v}} = \langle 6, 5 \rangle$

3



4



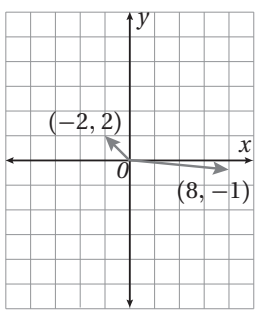
أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\vec{\mathbf{u}}$ وَ $\vec{\mathbf{v}}$ متوازييْنِ، أوْ متعامديْنِ، أوْ غيرَ ذلكَ في كلٍّ ممّا يأتي:

5 $\vec{\mathbf{u}} = \langle 4, -9 \rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle -9, 4 \rangle$

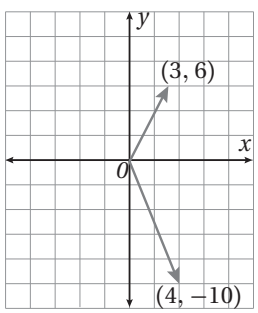
6 $\vec{\mathbf{u}} = \langle -5, 2 \rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle -10, 25 \rangle$

أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

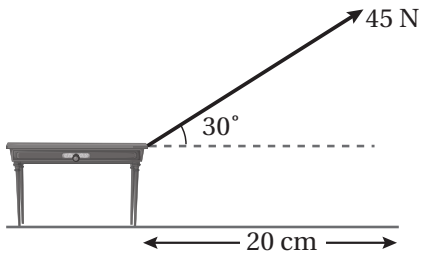
7



8



9 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سحبَ طاولةٍ بقوةٍ مقدارُها 45 N، وزاويةٍ قياسُها °30 معَ الأفقيِّ. إذا سُحِبَتِ الطاولةُ مسافةَ 20 cm، فأَجِدُ مقدارَ الشغلِ الذي بُذِلَ.



أختبِرُ مَعلوماتي بحلِّ التدريباتِ أوّلًا، وفي حالِ عَدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المُعطى.

• المَدى والمَدى الرُّبَيعيُّ (الدرسُ 2)

أجدُ المَدى والرُّبَيعِيّاتِ والمَدى الرُّبَيعِيَّ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

1. 85, 77, 58, 69, 62, 73, 55, 82, 67, 77, 59, 92, 75

2. 28, 42, 37, 31, 34, 29, 44, 28, 38, 40, 39, 42, 30

3.

الساقُ	الورقةُ
19	3 5 5
20	2 2 5 8
21	5 8 8 9 9 9
22	0 1 7 8 9
23	2

المفتاحُ: **19|3 = 193**

4.

الساقُ	الورقةُ
5	0 3 7 9
6	1 3 4 5 5 6
7	1 5 6 6 9
8	1 2 3 5 8
9	2 5 6 9
10	
11	7

المفتاحُ: **5|0 = 5.0**

سرعةٌ: يبيّنُ الجدولُ أدناهُ سرعةَ مجموعةٍ مِنَ الحيواناتِ بالكيلومترِ لكلِّ ساعةٍ.

الحيوانُ	السرعةُ (km/h)
الفهدُ الصيّادُ	100
النّمرُ	58
القطةُ	48
الفيلُ	40
الفأرُ	13
العنكبوتُ	2

5. أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ للبياناتِ.

6. أصفُ توزيعَ البياناتِ.

مثالٌ:

محافظاتٌ: يبيّنُ الجدولُ المجاورُ مِساحاتِ المحافظاتِ الأردنيةِ مقرَّبةً إلى أقربِ جزءٍ مِنْ عشَرةٍ.

مِساحاتُ المحافظاتِ الأردنيةِ	
المحافظةُ	المِساحةُ (بآلافِ الكيلومتراتِ المربعةِ)
عجلونُ	0.4
عمّانُ	7.5
العقبةُ	6.9
البلقاءُ	1.1
إربدُ	1.5
جرشُ	0.4
الكركُ	3.4
معانُ	32.8
مأدبا	0.9
المفرقُ	26.5
الطفيلةُ	2.2
الزرقاءُ	4.7

a) أجدُ المَدى.

الْخُطْوَةُ 1 أرتّبُ البياناتِ تصاعديًّا.

0.4, 0.4, 0.9, 1.1, 1.5, 2.2, 3.4, 4.7, 6.9, 7.5, 26.5, 32.8

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ المَدى.

أكبرُ قِيَمِ البياناتِ 32.8 وأصغرُها هي 0.4، إذنِ المَدى هوَ:

$$R = 32.8 - 0.4 = 32.4$$

b) أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ (IQR).

$$Q_2 = \frac{2.2 + 3.4}{2} = 2.8$$

النصفُ الأدنى: 0.4 0.4 0.9 1.1 1.5 2.2

النصفُ الأعلى: 3.4 4.7 6.9 7.5 26.5 32.8

$$Q_1 = \frac{0.9 + 1.1}{2} = 1$$

$$Q_3 = \frac{6.9 + 7.5}{2} = 7.2$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 7.2 - 1 = 6.2$$

إذنْ، المَدى الرُّبَيعِيُّ (IQR) للبياناتِ هوَ 6.2

c) أستعملُ المَدى والمَدى الرُّبَيعِيَّ لوصفِ البياناتِ.

مَدى هذِهِ البياناتِ 32.4 ألفَ كيلومترٍ مربعٍ، ورُبعُ محافظاتِ المملكةِ مِساحاتُها ألفُ كيلومترٍ مربعٍ أَوْ أقلُّ، ورُبعُ المحافظاتِ أيضًا مساحاتُها 7.2 آلافِ كيلومترٍ مربعٍ أَوْ أكثرُ، وتتراوحُ مِساحاتُ النصفِ الأوسطِ مِنَ المحافظاتِ بَيْنَ ألفِ كيلومترٍ مربعٍ وَ 7.2 آلافِ كيلومترٍ مربعٍ، ولا تتجاوزُ الفروقُ بَيْنَ مِساحاتِها 6.2 آلافِ كيلومترٍ مربعٍ.

• إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ لبياناتٍ مفردةٍ (الدرسُ 3)

أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لكلٍّ مِنَ البياناتِ الآتيةِ:

7

نقاطُ أشواطِ لعبةٍ إلكترونيّةٍ.
77, 66, 49, 58, 75

8

أهدافُ مبارياتِ كرةِ قدمٍ.
4, 3, 1, 2, 3, 5

9 **مواليدُ:** كانَتْ كُتَلُ المواليدِ الجددِ يومَ الخميسِ في أحدِ المستشفياتِ بالكيلوغرامِ كما يأتي:
3.7, 2.8, 4, 3.2, 3.1, 2.9, 3.4 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لكُتَلِ هؤلاءِ المواليدِ.

مثالٌ: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ للأعدادِ الآتيةِ: 19, 5, 123, 37

أجدُ مجموعَ القِيَمِ $19 + 5 + 123 + 37 = 184$

أقسمُ المجموعَ على عددِ القِيَمِ $\overline{x} = \frac{184}{4} = 46$

إذنْ: الوسطُ الحسابيُّ يُساوي 46

• إيجادُ الوسيطِ لبياناتٍ مفردةٍ (الدرسُ 3)

أجدُ الوسيطَ لكلِّ مجموعةٍ مِنَ الأعدادِ الآتيةِ:

10 14 , 70 , 55 , 3 , 2 , 100 , 9

11 4 , 3 , 2 , 4 , 7 , 1

12 ارتفاعاتُ بعضِ المباني بالأمتارِ: 21 , 23 , 21 , 23 , 23 , 21 , 24 , 20

13 أعمارُ معلّمينَ بالسّنواتِ: 49 , 32 , 41 , 26 , 28

مثالٌ: أجدُ الوسيطَ لكلِّ مجموعةٍ مِنَ الأعدادِ الآتيةِ:

a) 13, 20, 11, 15, 30, 27, 10

الْخُطْوَةُ 1 أرتّبُ القِيَمَ تصاعديًّا: 10, 11, 13, 15, 20, 27, 30

الْخُطْوَةُ 2 أبدأُ بشطبِ قيمةٍ مِنَ اليسارِ مَعَ قيمةٍ مِنَ اليمينِ، إلى أَنْ أجدَ القيمةَ الّتي في المنتصفِ.

~~10~~, ~~11~~, ~~13~~, (15), ~~20~~, ~~27~~, ~~30~~

إذنْ: الوسيطُ هُوَ 15

b) 400, 290, 355, 310, 430, 300, 270, 320

الْخُطْوَةُ 1 أرتّبُ القِيَمَ تصاعديًّا، وأشطبُ الأعدادَ مِنَ اليمينِ واليسارِ إلى أَنْ أصلَ إلى الوسيطِ:

~~270~~, ~~290~~, ~~300~~, (310, 320), ~~355~~, ~~400~~, ~~430~~

الْخُطْوَةُ 2 توجدُ قيمتانِ وسيطيّتانِ. إذنْ: الوسيطُ هُوَ الوسطُ الحسابيُّ لهاتَينِ القيمتَينِ:

$$\frac{310 + 320}{2} = 315$$

• إيجادُ المنوالِ لبياناتٍ مفردةٍ (الدرسُ 3)

أجدُ المنوالَ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

14 علاماتُ مجموعةٍ مِنَ الطّلبةِ في اختبارِ الرّياضيّاتِ: 15, 14, 10, 6, 13, 9, 16, 13, 13, 19

15 الرّياضةُ المفضّلةُ لَدى مجموعةٍ مِنَ الطّلبةِ: كرةُ القدمِ، كرةُ السّلّةِ، السّباحةُ، كرةُ القدمِ، كرةُ الطّائرةِ، كرةُ القدمِ، تِنِسُ الطّاولةِ.

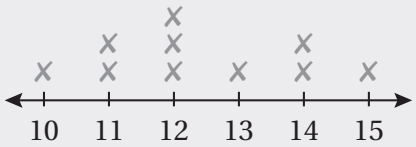
أجدُ المنوالَ لكلِّ مجموعةٍ مِنَ الأعدادِ الآتيةِ:

16 3, 5 , 3, 1, 2 , 3, 9, 9, 9, 3, 7

17 5, 12, 24, 10, 12, 5, 3, 12, 3, 7, 17, 5

مثالٌ: أجدُ المنوالَ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

a) أعمارُ المشاركينَ في إحدى المسابقاتِ



ألاحظُ مِنَ الشّكلِ أَنَّ أكثرَ قيمةٍ تكرّرَتْ هِيَ 12

إذنْ: المنوالُ 12

b) مجموعةُ الأحرفِ الأولى مِنْ أسماءِ أفرادِ عائلةٍ:

س ، ل ، س ، ن ، ل ، ن

ألاحظُ أَنَّ كلَّ حرفٍ تكرّرَ مرّتَينِ، ولا يوجدُ حرفٌ تكرّرَ أكثرَ مِنْ غيرِهِ؛ لِذا، لا يوجدُ منوالٌ لهذِهِ البياناتِ.

• تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ منظّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ (الدرسُ 3)

أزهارٌ: يُبيِّنُ الجــدولُ المجاورُ توزيعًا لأطــوالِ مجموعةٍ منْ أزهارِ النرجسِ، مُقرَّبةً إلى أقربِ سنتيمترٍ:

أطوالُ أزهارِ النرجسِ (t)	
الطولُ (cm)	التكرارُ
$10 \le t < 14$	21
$14 \le t < 18$	57
$18 \le t < 22$	65
$22 \le t < 26$	52
$26 \le t < 30$	12

18 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لأطوالِ الأزهارِ.

19 أُقدِّرُ منوالَ أطوالِ الأزهارِ.

20 أُقدِّرُ وسيطَ أطوالِ الأزهارِ.

كتبٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأعدادِ الكتبِ التي اشتراها 25 شخصًا منْ مكتبةِ زيادٍ في أحدِ الأيامِ:

عددُ الكتبِ المَبيعةِ	
عددُ الكتبِ	التكرارُ
1 – 3	10
4 – 6	8
7 – 9	4
10 – 12	1
13 – 15	2

21 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ للبياناتِ.

22 أُقدِّرُ منوالَ البياناتِ.

23 أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ.

مثالٌ:

طقسٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأيامِ شهرِ آذارَ بحسبِ درجاتِ الحرارةِ (إلى أقربِ درجةٍ سلسيةٍ) في محافظةِ عجلونَ:

درجاتُ الحرارةِ (T)	
التكرارُ	درجاتُ الحرارةِ (°C)
3	$10 \le T < 12$
7	$12 \le T < 14$
12	$14 \le T < 16$
5	$16 \le T < 18$
3	$18 \le T < 20$

a) أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لدرجاتِ الحرارةِ.

أُنشِـئُ جدولًا بإضافةِ عمودَينِ إلى الجدولِ المعطى، أُنظِّمُ فيهما مراكزَ الفئـاتِ ونواتجَ ضربِ التكراراتِ فـي مراكزِ الفئاتِ على النحوِ الآتي:

درجاتُ الحرارةِ (°C)	f	x	$f \times x$
$10 \le T < 12$	3	11	33
$12 \le T < 14$	7	13	91
$14 \le T < 16$	12	15	180
$16 \le T < 18$	5	17	85
$18 \le T < 20$	3	19	57
المجموعُ	30		446

صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ $\mu = \dfrac{\sum(x \times f)}{\sum f}$

بالتعويضِ $= \dfrac{446}{30}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 14.9

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ هوَ 14.9 °C تقريبًا.

b) أُقدِّرُ منوالَ درجاتِ الحرارةِ.

لتقديـرِ المنوالِ، أبحثُ عنْ مركزِ الفئةِ الأكثرِ تكرارًا. وبالرجوعِ إلى البياناتِ في الجدولِ أعلاهُ، أُلاحِظُ أنَّ الفئةَ: $14 \le t < 16$ تُقابِلُ أعلى تكرارٍ، وهوَ 12. وبذلكَ، فإنَّ المنوالَ هوَ مركزُ هذهِ الفئةِ تقريبًا.

إذنْ، منوالُ درجاتِ الحرارةِ هوَ 15 تقريبًا.

c) أُقدِّرُ وسيطَ درجاتِ الحرارةِ.

درجاتُ الحرارةِ (°C)	التكرارُ التراكميُّ
$10 \le T < 12$	3
$12 \le T < 14$	$3 + 7 = 10$
$14 \le T < 16$	$3 + 7 + 12 = 22$
$16 \le T < 18$	$3 + 7 + 12 + 5 = 27$
$18 \le T < 20$	$3 + 7 + 12 + 5 + 3 = 30$

الخُطْوَةُ 1 أُنشِئُ جدولَ التكرارِ التراكميِّ بإضافةِ عمودِ التكرارِ التراكميِّ كما في الجدولِ المجاورِ.

الخُطْوَةُ 2 أُحدِّدُ رتبةَ الوسيطِ.

رتبةُ الوسيطِ هيَ: $\frac{n+1}{2} = \frac{30+1}{2} = 15.5$.

الخُطْوَةُ 3 أُحدِّدُ الفترةَ التي يقعُ فيها وسيطُ البياناتِ.

بما أنَّ رتبةَ الوسيطِ هيَ 15.5، فإنَّ وسيطَ درجاتِ الحرارةِ يقعُ في الفترةِ: $14 \le t < 16$؛ لأنَّ التكرارَ التراكميَّ لهذهِ الفترةِ هوَ أوَّلُ تكرارٍ تراكميٍّ أكبرَ منْ أوْ يساوي 15.5

وبذلكَ، فإنَّ الوسيطَ هوَ مركزُ هذهِ الفئةِ تقريبًا.

إذنْ، وسيطُ درجاتِ الحرارةِ هوَ 15 تقريبًا.

• إيجادُ الانحرافِ المعياريِّ، والتباينِ لبياناتٍ منظّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ (الدرسُ 3)

24 أَجِدُ المَدى، والانحرافَ المعياريَّ، والتباينَ للبياناتِ في الجدولِ التكراريِّ الآتي:

القيمةُ	التكرارُ
5	3
6	5
7	8
8	3
15	1

مثالٌ: أَجِدُ الانحرافَ المعياريَّ، والتباينَ للبياناتِ في الجدولِ التكراريِّ المجاورِ:

القيمةُ x	10	12	15	17
التكرارُ f	1	3	4	2

أُضيفُ إلى الجدولِ أعمدةً لأحسُبَ فيها القيمَ الآتيةَ:

$$x \times f,\ x-\mu,\ (x-\mu)^2,\ (x-\mu)^2 f$$

القيمةُ x	التكرارُ f	$x \times f$	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 f$
10	1	10	-4	16	16
12	3	36	-2	4	12
15	4	60	1	1	4
17	2	34	3	9	18
المجموعُ	10	140			50

الوسطُ الحسابيُّ $\mu = \dfrac{\Sigma x \times f}{\Sigma f}$

بالتعويضِ والتبسيطِ $= \dfrac{140}{10} = 14$

التباينُ $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma (x-\mu)^2 \times f}{(\Sigma f)}$

بالتعويضِ والتبسيطِ $= \dfrac{50}{10} = 5$

الانحرافُ المعياريُّ $\sigma = \sqrt{5} \approx 2.24$

• إيجادُ احتمالِ وقوعِ حادثٍ في تجربةٍ عشوائيةٍ (الدرسُ 4)

يحتــوي كيسٌ على 6 كراتٍ حمراءَ، وَ5 كراتٍ زرقاءَ، وَ4 كراتٍ خضراءَ، علمًا بأنَّ جميعَ الكراتِ مُتماثِلةٌ. ســحبَتْ هندُ كرةً واحدةً عشوائيًّا، ما احتمالُ سحبِ كرةٍ:

25 حمراءَ؟ 26 ليسَتْ زرقاءَ؟ 27 صفراءَ؟

مثالٌ: رمى خليلٌ حجرَ نردٍ منتظمٍ مرَّةً واحدةً. أَجِدُ احتمالَ وقوعِ كلٍّ منَ الحادثيْنِ الآتييْنِ:

a) ظهورُ عددٍ أقلَّ منْ 3

إذا افترضْتُ أنَّ A هوَ حادثُ ظهورِ عددٍ أقلَّ منْ 3، فإنَّ:

عناصرَ الحادثِ A، وعددَها $A = \{1, 2\}\ ,\ n(A) = 2$

عناصرَ فضاءِ العيِّنةِ، وعددَها $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ ,\ n(\Omega) = 6$

احتمالَ الحادثِ A $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

b) ظهورُ عددٍ أكبرَ منْ 6

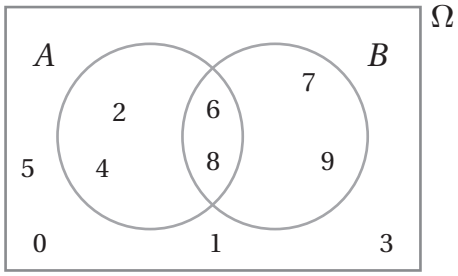
إذا افترضْتُ أنَّ B هوَ حادثُ ظهورِ عددٍ أكبرَ منْ 6، فإنَّ:

عناصرَ الحادثِ B، وعددَها $B = \varnothing\ ,\ n(B) = 0$

احتمالَ الحادثِ B $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{0}{6} = 0$

• إيجادُ الاحتمالِ باستعمالِ أشكالِ فِنْ (الدرسُ 4)

كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ مِنْ **0** إلى **9** على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثَينِ ***A*** و ***B*** في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

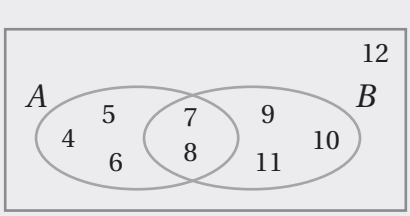


28 $P(A)$ 29 $P(B)$ 30 $P(A \cap B)$

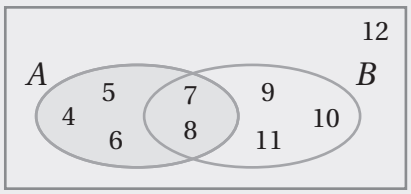
31 $P(A \cup B)$ 32 $P(\overline{A})$ 33 $P(\overline{B})$

34 $P(\overline{A \cap B})$ 35 $P(\overline{A \cup B})$ 36 $P(B - A)$

مثالٌ: كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ **4** إلى **12** على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ A و B في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



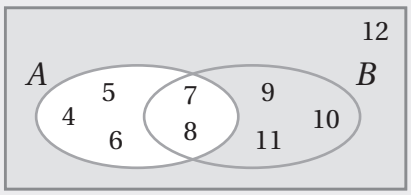
a) $P(A)$



بمــا أنَّ عددَ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ هوَ 9، وعددَ عناصرِ الحادثِ A هوَ 5 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ، فإنَّ:

$$P(A) = \frac{5}{9}$$

b) $P(\overline{A})$

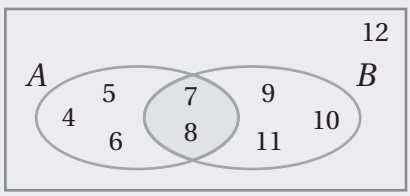


$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ صيغةُ احتمالِ المُتمِّمةِ

$= 1 - \frac{5}{9}$ بالتعويضِ

$= \frac{4}{9}$ بالتبسيطِ

c) $P(A \cap B)$

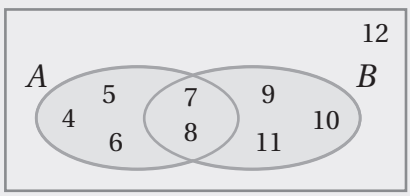


بما أنَّ $A \cap B$ يعني وقوعَ الحادثِ A والحادثِ B معًا، فإنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 2 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

إذنْ:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

d) $P(A \cup B)$

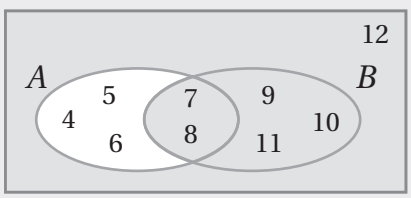


بمــا أنَّ $A \cup B$ يعني وقوعَ الحادثِ A، أوْ وقوعَ الحادثِ B، أوْ وقوعَ الحادثَيــنِ معًا، فإنَّ عــددَ عناصرِ هذا الحادثِ هــوَ 8 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

إذنْ:

$$P(A \cup B) = \frac{8}{9}$$

e) $P(\overline{A} \cup B)$

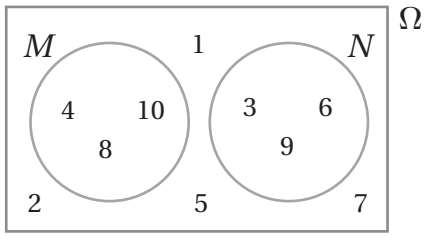


بما أنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 6 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ، فإنَّ:

$$P(\overline{A} \cup B) = \frac{6}{9}$$

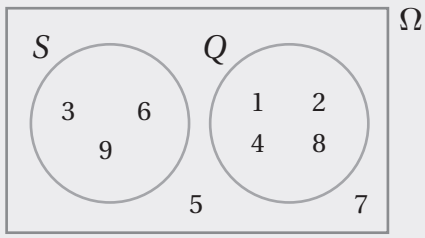
إيجادُ احتمالِ الحوادثِ المتنافيةِ باستعمالِ أشكالِ فِنْ (الدرسُ 4)

كُتِبَــتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 10 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشــوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ M و N في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



37 $P(M \cap N)$ 38 $P(M \cup N)$ 39 $P(M - N)$

مثالٌ: كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 9 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثَينِ Q و S في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



a) $P(S \cap Q)$

أُلاحِظُ منْ شكلِ فِنْ أنَّ الحادثَ S والحادثَ Q متنافيانِ؛ لأنَّهُ لا توجدُ عناصرُ مشتركةٌ بينَهُما. إذنْ:

$$P(S \cap Q) = \frac{0}{9} = 0$$

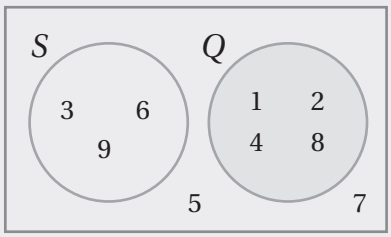
b) $P(S \cup Q)$

بمــا أنَّ الحادثَ S والحادثَ Q متنافيانِ، فإنَّ $S \cup Q$ يعني وقــوعَ الحادثِ S فقطْ، أوْ وقوعَ الحادثِ Q فقطْ؛ لأنَّهُما لا يقعانِ معًا. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 7 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

إذنْ، احتمالُ الحادثِ $S \cup Q$ هوَ:

$$P(S \cup Q) = \frac{7}{9}$$

c) $P(Q - S)$



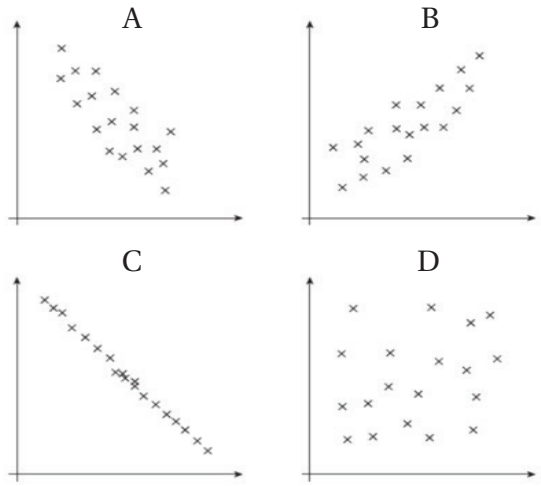
بمــا أنَّ الحــادثَ S والحادثَ Q متنافيــانِ، فــإنَّ $Q - S$ يعني وقوعَ الحادثِ Q فقطْ؛ لأنَّهُما لا يقعانِ معًا كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ. إذنْ:

$$P(Q - S) = \frac{4}{9}$$

الدرسُ 1

أشكالُ الانتشارِ
Scatter Graphs

مستعينًا بالأشكالِ المجاورةِ، أكتبُ في الفراغِ الآتي رمزَ شكلِ الانتشارِ المناسبِ:



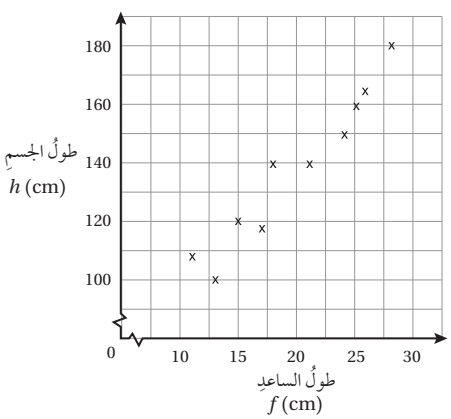
1. يدلُّ شكلُ الانتشارِ ..... على عدمِ وجودِ ارتباطٍ بينَ المُتغيِّرَيْنِ.
2. يدلُّ شكلُ الانتشارِ ..... على وجودِ ارتباطٍ موجبٍ بينَ المُتغيِّرَيْنِ.
3. يدلُّ شكلُ الانتشارِ ..... على وجودِ ارتباطٍ سالبٍ وقويٍّ بينَ المُتغيِّرَيْنِ.

يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ الكتلَ والأطوالَ لِـ 12 طالبةً في الصفِّ السابعِ:

الاسمُ	الكتلةُ (kg)	الطولُ (cm)
مريمُ	41	123
شيماءُ	48	125
نانسي	47.5	127
خلودُ	52	128
أسيلُ	49.5	129
لانا	55	129
يقينُ	55	133
لورا	55.5	135
هيا	61	137
بيانُ	65.5	140
ياسمينُ	60	143
تمارا	68	145

4. أرسمُ شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ، واصفًا الارتباطَ بينَ الكتلةِ والطولِ.
5. أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً للبياناتِ المُمثَّلةِ في شكلِ الانتشارِ.
6. صفاءُ إحدى طالباتِ الصفِّ السابعِ، وطولُها 132 cm
أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً لتقديرِ كتلتِها.
7. انتقلَتْ طالبةٌ في الصفِّ السابعِ منْ مدرسةٍ أُخرى إلى مدرسةِ هؤلاءِ الطالباتِ.
أُقدِّرُ طولَ الطالبةِ الجديدةِ، علمًا بأنَّ كتلتَها 45 kg

يُمثِّلُ شكلُ الانتشارِ المجاورِ العلاقةَ بينَ طولِ الساعدِ f بالسنتيمترِ، وطولِ الجسمِ h بالسنتيمترِ لعشرةِ أشخاصٍ:

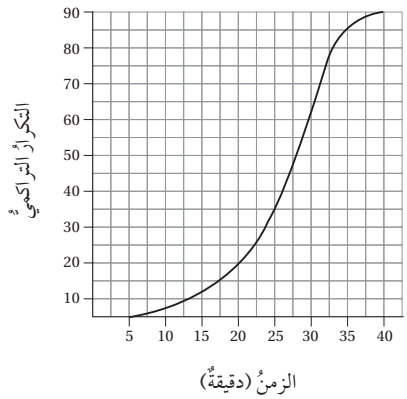


8. أَصِفُ الارتباطَ بينَ طولِ الجسمِ وطولِ الساعدِ.
9. أرسمُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً، ثمَّ أكتبُ معادلتَهُ.
10. أستعملُ المستقيمَ الأفضلَ مطابقةً لتقديرِ طولِ شخصٍ، طولُ ساعدِهِ 27 cm

الدرسُ 2

المنحنى التكراريُّ التراكميُّ
Cumulative Frequency Graph

سُجِّلَ الزمنُ الذي استغرقَتْهُ سيّارةُ الإسعافِ لنقلِ مريضٍ منْ مكانِهِ إلى المستشفى في عددٍ منَ الحالاتِ. مستعينًا بالمنحنى التكراريِّ التراكميِّ المجاورِ الذي يُمثِّلُ البياناتِ المُتعلِّقةَ بذلكَ:



1. أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ.
2. أَجِدُ المدى الربيعيَّ.
3. أَجِدُ المئينَ 40، مُفسِّرًا معناهُ.

نشرَ موقعٌ إخباريٌّ 177 خبرًا في أحدِ الأيامِ. وقدْ رصدَ القائمونَ على الموقعِ عددَ الأشخاصِ الذينَ قرؤوا كلَّ خبرٍ، ثمَّ نظَّموا البياناتِ في الجدولِ التكراريِّ المجاورِ:

الفئاتُ (عددُ القُرّاءِ)	التكرارُ (عددُ الأخبارِ)
$0 \le x < 50$	6
$50 \le x < 100$	9
$100 \le x < 150$	15
$150 \le x < 200$	25
$200 \le x < 250$	31
$250 \le x < 300$	37
$300 \le x < 350$	32
$350 \le x < 400$	17
$400 \le x \le 450$	5

4. أُكمِلُ جدولَ التكرارِ التراكميِّ.
5. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ.
6. أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ، والمدى الربيعيَّ.
7. إذا قرَّرَ القائمونَ على هذا الموقعِ حذفَ الأخبارِ التي قرأَها أقلُّ منْ 60 شخصًا، فما عددُ الأخبارِ التي ستُحذَفُ؟

خضعَتْ مجموعتانِ لاختبارِ حسابٍ ذهنيٍّ. وقدْ رُصِدَ عددُ الإجاباتِ الصحيحةِ لكلٍّ مجموعةٍ في الجدولِ الآتي:

عددُ الإجاباتِ الصحيحةِ	$0 \le x < 4$	$4 \le x < 8$	$8 \le x < 12$	$12 \le x < 16$	$16 \le x < 20$
A: الفتيانُ	5	9	23	28	17
B: الفتياتُ	6	10	19	25	22

8. أرسمُ المنحنى التكراريَّ التراكميَّ لكلٍّ منَ الفتيانِ والفتياتِ على ورقةِ الرسمِ البيانيِّ نفسِها.
9. أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ، والمدى الربيعيَّ لكلٍّ منْهُما.
10. أيُّ المجموعتيْنِ أداؤُها أفضلُ في الاختبارِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الدرسُ 3

مقاييسُ التشتُّتِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ

Measures of Variation for Frequency Tables with Class Intervals

يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ الآتي توزيعًا لأطوالِ بعضِ النباتاتِ على مدارِ أسبوعٍ في تجربةٍ زراعيةٍ:

الطولُ (cm)	(f)	(x)	$f.x$	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2$	$f\times(x-\mu)^2$
$25 \le t < 29$	2					
$30 \le t < 34$	4					
$35 \le t < 39$	7					
$40 \le t < 44$	10					
$45 \le t < 49$	8					
$50 \le t < 54$	6					
$55 \le t \le 59$	3					
المجموعُ						

1. أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجدولِ.
2. أُقدِّرُ كلًّا منَ الوسطِ الحسابيِّ، والتباينِ.

يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعَ مدَّةِ الانتظارِ t بالدقيقةِ لعددٍ منْ مُراجِعي دائرةٍ حكوميةٍ منْ لحظةِ أخْذِ المُراجِعِ بطاقةَ المراجعةِ إلى لحظةِ استدعائِهِ منَ الموظفِ المعنيِّ:

الزمنُ (min)	التكرارُ
$0 \le t < 5$	4
$5 \le t < 10$	9
$10 \le t < 15$	20
$15 \le t < 20$	7
$20 \le t \le 25$	5

3. أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ.
4. أُقدِّرُ التباينَ، والانحرافَ المعياريَّ.

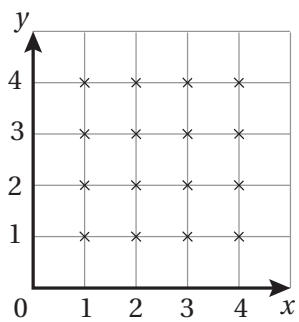
5. **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أجمعُ بياناتٍ لِـ 20 مشاهدةً، وأُنظِّمُها في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ، ثمَّ أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ والتباينَ.

الدرسُ 4

احتمالاتُ الحوادثِ المتنافيةِ
Probability of Mutually Exclusive Events

فـي تجربةِ اختيارِ عددٍ عشـوائيًّا منْ بينِ الأعـدادِ: 10 , 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1، إذا كانَ (A) حادثَ اختيارِ عددٍ أكبرَ منْ 4، و(B) حادثَ اختيارِ عددٍ يقبلُ القسمةَ على 3 منْ دونِ باقٍ، فأَجِدُ:

1. احتمالَ اختيارِ عددٍ أقلَّ منْ 4، ويقبلُ القسمةَ على 3
2. احتمالَ اختيارِ عددٍ أقلَّ منْ 4، أوْ يقبلُ القسمةَ على 3
3. يُبيِّـنُ التمثيـلُ البيانيُّ المجاورُ فضـاءَ العيِّنةِ Ω لتجربـةٍ عشـوائيةٍ. إذا كانَ (A) يُمثِّلُ النقـاطَ الواقعـةَ علـى المسـتقيمِ $x = 3$، وكانَ (B) يُمثِّـلُ النقـاطَ الواقعـةَ على المسـتقيمِ $y = 5 - x$، إذا اختيـرَتْ نقطـةٌ عشـوائيًّا، فمـا احتمالُ أنْ تقـعَ على كلا المستقيميْنِ: $x = 3$، وَ $y = 5 - x$؟



إذا كانَ A و B حادثينِ في تجربةٍ عشوائيّةٍ، وكانَ $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.3$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

4. $P(A \cap B)$
5. $P(A \cap \overline{B})$
6. $P(B \cup \overline{A})$

سُئِلَتْ 516 مهندسةً كهربائيةً وكيميائيةً وميكانيكيةً عنِ المبحثِ المُفضَّلِ لكلٍّ منْهُنَّ عندَما كُنَّ في الصفِّ العاشرِ، وقدْ نُظِّمَتْ إجاباتُهُنَّ في الجدولِ المجاورِ.

المبحثُ المُفضَّلُ	العلومُ	الرياضياتُ	المجموعُ
مهندسةٌ كهربائيةٌ:	90	85	175
مهندسةٌ كيميائيةٌ:	91	80	171
مهندسةٌ ميكانيكيةٌ:	81	89	170
المجموعُ:	262	254	516

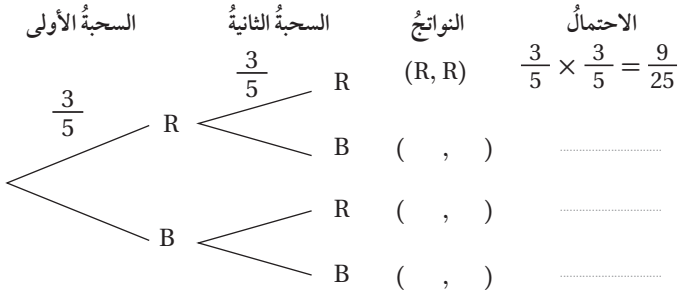
إذا اختيرَتْ مهندسةٌ عشوائيًّا منْ هذهِ العيِّنةِ، فما احتمالُ:

7. اختيارِ مهندسةٍ كهربائيةٍ تُفضِّلُ مبحثَ العلومِ؟
8. اختيارِ مهندسةٍ ميكانيكيةٍ تُفضِّلُ مبحثَ الرياضياتِ؟
9. اختيارِ مهندسةٍ ميكانيكيةٍ، أوْ مهندسةٍ تُفضِّلُ مبحثَ الرياضياتِ؟
10. اختيارِ مهندسةٍ لا تُفضِّلُ مبحثَ الرياضياتِ، لكنَّها ليسَتْ مهندسةً كيميائيةً؟

الدرسُ 5

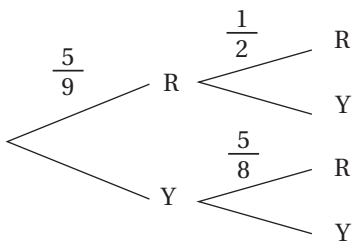
احتمالاتُ الحوادثِ المستقلةِ والحوادثِ غيرِ المستقلةِ
Probability of Independent and Dependent Events

يحتوي كيسٌ على 3 كراتٍ زجاجيةٍ حمراءَ (R)، وَكرتيْنِ زجاجيتيْنِ زرقاويْنِ (B)، علمًا بأنَّ جميعَ الكراتِ مُتماثِلةٌ. إذا سُحِبَتْ منَ الكيسِ كرتانِ على التوالي معَ الإرجاعِ:



1. أُكمِلُ الشجرةَ الاحتماليةَ المجاورةَ.
2. أَجِدُ احتمالَ أنْ تكونَ الكرتانِ المسحوبتانِ منَ اللونِ نفسِهِ.
3. أَجِدُ احتمالَ أنْ تكونَ واحدةٌ على الأقلِّ منَ الكراتِ المسحوبةِ حمراءَ اللونِ.
4. أَجِدُ احتمالَ ألّا تكونَ الكرتانِ المسحوبتانِ حمراويْنِ.

يحتوي كيسٌ على 5 حبّاتِ حلوى بنكهةِ النعناعِ (R)، وَ4 حبّاتٍ أُخرى بنكهةِ الكراميلِ (Y)، علمًا بأنَّ جميعَ الحبّاتِ مُتماثِلةٌ. اختارَ طفلٌ منَ الكيسِ حبَّةَ حلوى عشوائيًّا وأكلَها، ثمَّ اختارَ حبَّةً أُخرى عشوائيًّا وأكلَها:



5. أُكمِلُ الشجرةَ الاحتماليةَ المجاورةَ.
6. ما احتمالُ أنْ يكونَ الطفلُ قدَ أكلَ حبَّتَيْ حلوى بنكهةِ الكراميلِ؟
7. مـا احتمالُ أنْ يكونَ الطفلُ قدْ أكلَ حبَّةَ حلوى بنكهةِ النعناعِ في المرَّةِ الثانيةِ، علمًا بأنَّهُ أكلَ حبَّةً بنكهةِ الكراميلِ في المرَّةِ الأولى؟

إذا كانَ $P(A) = 0.5, P(B) = 0.7, P(A \cup B) = 0.8$، فأَجِدُ:

8. $P(A \cap B)$
9. $P(B \mid A)$
10. $P(A \mid B)$

11. أُلقِيَ حجرُ نردٍ منتظمٍ عشـوائيًّا مرَّتيْنِ متتاليتيْـنِ، وجُمِعَ الرقمانِ الظاهرانِ على الوجهِ العلـويِّ. أَجِدُ احتمالَ أنْ يكونَ المجموعُ 8 إذا ظهرَ الرقمُ 5 مرَّةً واحدةً على الأقلِّ.